**Десятичная и шестнадцатеричная система счисления**

### Что такое система счисления?

Для того, чтобы разобраться, как хранится и обрабатывается информация в компьютере, познакомимся сначала с понятием система счисления.

**Система счисления** — это способ записи *чисел* с помощью заданного набора специальных знаков — *цифр*. Существуют непозиционные и позиционные системы счисления.

**В непозиционных системах** вес цифры (т. е. тот вклад, который она вносит в значение числа) не зависит от ее позиции в записи числа.

Знакомая нам римская система счисления для обозначения чисел 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 использует заглавные латинские буквы I, V, X, L, C, D и M соответственно. Число в римской системе счисления обозначается набором стоящих подряд чисел.

Например, число 34 будет выглядеть так: XXXIV.

Проверим: XXXIV = 10 + 10 + 10 + (5 – 1). Вес цифры X в каждой позиции равен десяти. Но попробуйте-ка перемножить в этой системе LXXVII на XV (т. е. 77 на 15), не переходя к привычной нам записи чисел!

**Позиционная система счисления** — замечательное изобретение человечества. Возникновение этой системы стало возможным после величайшего изобретения — цифры 0 для обозначения отсутствующей величины.

### *Знаменитый математик и физик XVIII–XIX вв. П. Лаплас сказал: «Мысль выражать все числа десятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этому методу, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой»*

### Немного истории:

Считается, что **основание десять** изначально связано с количеством пальцев на руках. Первая запись позиционной десятичной системы обнаружена в Индии в 595 г. В ней для записи числа использовались символы, рядом с которыми добавляли обозначение разряда. Затем разряды отмечать перестали, но у каждой цифры осталась определенная позиция. Соответственно, пустая позиция отмечалась нулем.

Индийская нумерация распространилась в арабские страны. На нее обратил внимание знаменитый математик Аль-Хорезми, основатель алгебры. Она написал первое руководство по арифметике, основанной на позиционном десятичном счислении. Так как его работа была написана на арабском, то в Европе закрепилось название «арабские цифры».

В работах Аль-Хорезми были изложены правила (алгоритмы) сложения и умножения десятичных чисел. От европейской транслитерации имени ученого — «Algoritmi» появился термин «алгоритм», впоследствии обозначающий всякий регулярный процесс, дающий решение за конечное число шагов.

### Десятичная система счисления

Мы с вами пользуемся *десятичной* системой счисления. Она пришла из Индии, где появилась не позднее VI в. н. э.

Рассмотрим три числа: 153, 531, 315. Они различны, хотя в них участвуют одни и те же цифры. Различаются же записи расположением цифр, — иными словами, тем, какую позицию занимает та или иная цифра. Отсюда и пошло название такой системы — позиционная система.

В первом числе (153) единица — это не просто единица, а одна сотня. Пятерка соответственно умножается на десять, а вот тройка — тройка и есть. Иными словами, число 153 можно записать в виде:

153 = 100 + 50 + 3

или

153 = 1 × 102 + 5 × 101 + 3 × 100.

Запишем в виде суммы еще одно число, например 3265, и рас смотрим его внимательно. В числе 3265 имеются 5 единиц, 6 десятков, 2 сотни и 3 тысячи. Каждую цифру в числе пронумеруем справа налево, начиная нумерацию с нуля. Цифра 5 получит номер 0, цифра 6 — номер 1, 2 — номер 2, 3 — номер 3.

Эти номера являются показателями степеней числа 10 в следующей записи:



Очевидно, что в десятичной системе число 10 и его степени: 10, 100, 1000, и т. д. играют особую роль. Как выглядит счет в десятичной системе?

0, 1, 2, 3,…, 9, 10…

*Обратите внимание: как только нам не хватило цифры (цифры 10 нет!), появилась единица в старшем разряде — разряде десятков — и ноль в младшем.*

Мы получили *первую степень* числа 10 — основания десятичной системы (10=101). Числа стали состоять из двух цифр. Считая дальше, действуем аналогично:

…97, 98, 99, 100,…

100 = 102 — *вторая степень* числа 10. Числа стали трехзначными. И так далее.

**Основание** позиционной системы счисления — это количество различных знаков или символов, которые используются в этой системе для изображения цифр.

В десятичной системе счисления основание равно 10, т. к. в ней используются десять цифр от 0 до 9. (Не путайте цифры и числа!) Выбор числа 10 в качестве основания позиционной системы в значительной мере объясняется традицией, а не какими-то замечательными свойствами числа 10.

Чтобы записать *смешанное* число, то есть число, состоящее из целой и дробной частей, используются отрицательные степени числа 10.

Рассмотрим, например, число 333,3. Цифра 3 несет разную нагрузку в зависимости от места своего положения. Первая тройка означает 3 сотни, вторая — 3 десятка, третья — 3 единицы, последняя — 3 десятых долей единицы, т. е.



А само число 333,3 является сокращенной записью следующего выражения:

333,3 = 300 + 30 + 3 + 0,3 = 3х102 + 3х101 + 3х100 + 3х10\_1

В общепринятой десятичной системе счисления используется всего десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Но в истории человечества существовали и другие системы: двенадцатеричная (до сих пор посуду считают дюжинами), шестидесятеричная (60 секунд в минуте, 60 минут в часе). Победила десятичная. Может быть, потому, что у человека десять пальцев, которые он использовал для счета.

### Резюме

1. *В позиционных системах счисления вес (значение) каждой цифры меняется в зависимости от ее позиции в записи числа.*
2. *Количество цифр ограничено, но с их помощью можно изобразить любое число.*
3. *Любая позиционная система характеризуется своим основанием — количеством различных знаков или символов, которые используются в этой системе для изображения цифр.*

### Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система счисления, на сегодняшний день является наиболее популярным средством компактной записи двоичных чисел. Очень широко используется при разработке и проектировании цифровой техники.

Как следует из названия, основанием данной системы является число шестнадцать 16 или в шестнадцатеричной системе 1016. Чтобы не было путаницы, при записи чисел в системах счисления отличных от десятичных, справа внизу от основной записи числа будем указывать основание системы счисления. Раз основанием системы является число шестнадцать, значит, для изображения чисел нам потребуется шестнадцать цифр. Первые десять цифр берутся из, привычной нам, десятичной системы (0,1,..,8,9) и еще добавляются шесть букв латинского алфавита (a,b,c,d,e,f) . Например, в шестнадцатеричном числе 3f7c2 буквы "f" и "c" являются шестнадцатеричными цифрами.

Счет в шестнадцатеричной системе происходит аналогично счету в десятичной. Давайте попробуем считать и записывать числа конструируя их из имеющихся шестнадцати цифр:

Ноль - **0**;  
Один - **1**;  
Два - **2**;  
...  
и так далее…  
...  
Восемь - **8**;  
Девять - **9**;  
Десять - **a**;  
Одиннадцать - **b**;  
Двенадцать - **c**;  
Тринадцать - **d**;  
Четырнадцать - **e**;  
Пятнадцать - **f**;

А что делать дальше? Все цифры кончились. Как же изобразить число Шестнадцать? Поступим аналогично тому как мы поступали в десятичной системе. Там мы вводили понятие десятка, здесь же введем понятие "шестнадцать" и скажем, что шестнадцать - это одна "шестнадцать" и ноль единиц. А это уже можно и записать - "1016".

Итак, Шестнадцать - **10**16 (одна "шестнадцать", ноль единиц)  
Семнадцать - **11**16 (одна "шестнадцать", одна единица)  
...  
и так далее…  
...  
Двадцать пять - **19**16 (одна "шестнадцать", девять единиц)  
Двадцать шесть - **1a**16 (одна "шестнадцать", десять единиц)  
Двадцать семь - **1b**16 (одна "шестнадцать", одинадцать единиц)  
...  
и так далее…  
...  
Тридцать - **1e**16 (одна "шестнадцать", четырнадцать единиц)  
Тридцать один - **1f**16 (одна "шестнадцать", пятнадцать единиц)  
Тридцать два - **20**16 (две "шестнадцать", ноль единиц)  
Тридцать три - **21**16 (две "шестнадцать", одна единица)  
...  
и так далее…  
...  
Двести пятьдесят пять - **ff**16 (пятнадцать по "шестнадцать", пятнадцать единиц)

А теперь, чтобы считать дальше, нужно вводить более крупную единицу счета. Если в десятичной системе, мы в подобной ситуации вводили сотню, то в шестнадцатеричной это будет "Двести пятьдесят шесть".

Двести пятьдесят шесть - **100**16 (одна "Двести пятьдесят шесть", ноль по "шестнадцать", ноль единиц)  
Двести пятьдесят семь - **101**16 (одна "Двести пятьдесят шесть", ноль по "шестнадцать", одна единица)  
Двести пятьдесят восемь - **102**16 (одна "Двести пятьдесят шесть", ноль по "шестнадцать", две единицы)  
...  
и так далее...  
...

Всегда, когда у нас исчерпался набор цифр для отображения следующего числа, мы вводим более крупные единицы счета (т.е. считаем по "шестнадцать", по "Двести пятьдесят шесть" и т.д.) и записываем число с удлинением на один разряд.

Рассмотрим число **3e2c**16 записанное в шестнадцатеричной системе счисления. Про него можно сказать, что оно содержит: три по четыре тысячи девяносто шесть, "e" (четырнадцать) по двести пятьдесят шесть, два по шестнадцать и "c" (двенадцать) единиц. И получить его значение через входящие в него цифры можно следующим образом.

**3e2c**16 = **3**\*4096+**14**\*256+**2**\*16+**12**\*1, здесь и далее знак \* (звездочка) означает умножение.

Но ряд чисел 4096, 256, 16, 1 есть не что иное, как целые степени числа шестнадцать (основания системы счисления) и поэтому можно записать:

**3e2c**16 = **3**\*163+**14**\*162+**2**\*161+**12**\*160

Подобным образом для шестнадцатеричной дроби (дробного числа), например: **0.5a2**16. Про него можно сказать, что оно содержит: пять шестнадцатых, "a" (десять) двести пятьдесят шестых и две четыре тысячи девяносто шестых долей. И его значение можно вычислить следующим образом:

**0.5a2**16 = **5**\*(1/16) + **10**\*(1/256) + **2**\*(1/4096)

И здесь ряд чисел 1/16; 1/256 и 1/4096 есть не что иное, как целые степени числа шестнадцать, и мы также можем записать:

**0.5a2**16 = **5**\*16-1 + **10**\*16-2 + **2**\*16-3

Для смешанного числа 7b2.1f9 аналогичным образом можем записать:

**7b2.1f9** = **7**\*162+**11**\*161+**2**\*160+**1**\*16-1+**15**\*16-2+**9**\*16-3

Пронумеруем разряды целой части некоторого шестнадцатеричного числа, справа налево, как 0,1,2…n (нумерация начинается с нуля!). А разряды дробной части, слева направо, как -1,-2,-3…-m, то значение некоторого шестнадцатеричного числа может быть вычислено по формуле:

**N = dn16n+dn-116n-1+…+d1161+d0160+d-116-1+d-216-2+…+**

**d-(m-1)16-(m-1)+d-m16-m**

где: n - количество разрядов в целой части числа минус единица;

m - количество разрядов в дробной части числа;

d i - цифра, стоящая в i-м разряде.

Эта формула называется формулой поразрядного разложения шестнадцатеричного числа, т.е. числа записанного в шестнадцатеричной системе счисления. Если мы в этой формуле заменим число шестнадцать на некоторое произвольное число **q**, то получим формулу разложения для числа записанного в **q**-й системе счисления, т.е. с основанием **q**:

**N = dnqn+dn-1qn-1+…+d1q1+d0q0+d-1q-1+d-2q-2+…+d-(m-1) q-(m-1)+d-m q-m**

По этой формуле всегда можно вычислить значение числа, записанного в любой позиционной системе счисления с основанием **q**.

### Задание: определение числа по его записи в позиционной системе счисления

Итак, когда мы записываем некоторое число, скажем 123, в привычной нам десятичной системе счисления, то понимать эту запись следует так:

. (1)

Обратите внимание на множители вида 102, 101, 100 в этом выражении. Если бы вместо десятичной мы пользовались, скажем, пятеричной системой счисления, то вместо «10» в аналогичной формуле везде фигурировало бы «5». Т.е. число 1235 следует понимать так:

 (2)

(в этой формуле все, что стоит справа от первого знака «=», записано в десятичной системе).

## Основные свойства систем счисления

1. Система счисления по основанию N использует ровно N цифр: от 0 до N-1 (включительно). Например, в десятичной системе используются цифры от 0 до 9, в восьмеричной — от 0 до 7, в двоичной — от 0 до 1. В 16-ричной — от 0 до F, где A=10, B=11..F=15.
2. n-ый разряд в записи числа в системе по основанию k соответствует n-ой степени k (разряды нумеруются справа налево, начиная с 0-го):

12310

единицы (x1)

десятки (x10)

сотни (x100)

1235

единицы (x1)

пятерки (x5)

25-ки (x25)

1. В любой системе счисления число, равное основанию системы, выглядит как «10». Например, 1016=1610, 108=810, 105=510, 102=210.
2. Дописывание справа нуля эквивалентно *умножению* числа на основание системы счисления, в которой оно записано, вычеркивание младшего разряда — *делению* на него же. Например, 125=1·5+2=710. Дописываем 0: 1205=1·25+2·5+0=3510 (получилось в 5 раз больше).
3. С помощью n разрядов k-чной системы счисления можно записать  различных чисел. Как правило, это числа от 0 до kn-1.

**Задание 1.** Задана запись некоторого числа в системе счисления по основанию k. Определить, что это за число. Используя вычисления, аналогичные (1) и (2), определите числа, закодированные следующими записями:

* 1001102
* 37348
* 22315
* 7AB816

**Задание 2.** Задано число в системе счисления по основанию 10, равное дате вашего рождения ДДММГГГГ(например 01012001). Представить это число в системах счисления по основанию 2, 8,16.